

## 時系列モデル $ARMA$ 過程の推定について

坂野 匡弘

### I はじめに

経営戦略または経営計画における予測手法として時系列分析は重要な要件である。

現在時系列分析に関する文献および論文が多く発表され、ソフトウェアも専用パッケージの形で市販されている。しかし、市販ソフトは機能的にクローズされており企業のソフトの一部にプラグインするようなオープンな形のソフトウェアは存在しない。ソフト開発のためには市販本からアルゴリズムを読み取ること自体大変困難である。文献の大半は時系列の性質に関する学術的記述が主で、実用化のための時系列の定常化の確定的方法、推定の具体的な方法に触れている文献が少ないと思われる。本研究は定常化された時系列  $ARIMA(p, q)$  の推定に関し詳細に記述しアルゴリズムも付け加えた。

定常化の各論に関しては多くの文献で紹介されているので、定常化の過程は概略の記述に留めた。

なお、本研究で行った理論の実証のために、時系列の定常化、推定はすべて筆者が VBA で作成したプログラムを用いた。

### II 時系列データの定常化概説

時系列データの定常化の各々は多くの文献で紹介されているので詳細は割愛し、全体としてどのような方法で定常化を行ったかの概略を述べたい。

時系列データは傾向変動 (Trend :T) , 循環変動 (Cyclic fluctuation :C) , 季節変動 (Seasonal variation :S) 不規則変動 (Irregular motion :I) の要素で結合されていると考えられる。これらの変動要素を含んだ時系列が  $SARIMA(p, d, q)$  モデルとして表現される。

季節変動の除去は中心化 1 2 項移動平均法を用いて除去する方法、12個のダミー変数を用いて季節指数を推定し原系列から除去する方法、センサス局法 II X-1 1 による除去が考えられる。本研究では中心化12ヶ月移動平均を試みたが時系列データの両端に 6 項ずつの欠項が生じそれを埋めるためにセンサス局法同様のアルゴリズムが必要となるので本研究ではセンサス局法 II X-1 1 を用いて原系列から季節変動を除去し  $ARIMA(p, d, q)$  を得た。

原系列に含まれる循環変動はいわゆる景気

変動 (Business fluctuation) である。

1年以上の大きな変動要素である循環変動の除去は周期も長く除去することは困難を極める。本研究では、Blackman-Tukey法またはFFT法によりスペクトルを求め、求めた周波数のフーリエ級数を用いて1年以上の周期変動を除去した。

原型列から循環変動、季節変動を除去した系列は過去から現在まで無限の和を持った時系列である。すなわち、1次あるいは2次以

上の傾向を持った非定常な時系列データである。d次の多項式を含んだ系列の傾向変動除去はd階の差分をとることにより傾向がなくなり定常な時系列に変換される。しかし、不規則変動を含む系列にd階の階差をとることにより移動平均の繰り返しで生ずるスラッスキー・ユール効果と同様な原系列にはない波形が生ずる。そこで階差を用いずd次の多項式回帰分析を用いて傾向変動を除去し、時系列  $ARMA(p, q)$  を得た。

### Ⅲ $ARMA(p, q)$ モデルの推定

#### 1. $AR(p)$ モデルの同定

$AR(p)$  モデルの偏自己相関  $\phi_{kk}$  は  $(p+1)$  次で切断 (cut-off) され、 $(p+1)$  次以上では常に

0 であることが知られている。自己偏相関  $\phi_{kk}$  は  $\rho(k)$  に関する次の方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \rho(2) & \cdots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(k-2) \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \cdots & \rho(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{k1} \\ \hat{\phi}_{k2} \\ \vdots \\ \hat{\phi}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(k) \end{bmatrix}$$

を解き、 $\phi_{kk}$  が近似的に正規分布に従うことを利用し、帰無仮説の検定を行い切断される点  $(p+1)$  を求め、 $AR(p)$  モデルの次数  $p$  を決定した。

#### 2. $MA(q)$ モデルの同定

$MA(q)$  モデルの  $k$  次の自己相関  $\rho(k)$  は  $(q+1)$  次で切断されそれ以上では常に 0 になる。

自己相関  $\rho(k)$  は漸的に正規分布に従うことを利用し、帰無仮説の検定を行い、切断点  $(q+1)$  を求め  $MA(q)$  の  $q$  を決定した。

#### 3. $ARMA(p, q)$ の同定

まず  $AR(p)$  モデルの同定を行いモデルの次数  $p$  を決定し、これを  $p_{\max}$  とする。

次数  $p$  を  $p = 0 < 1 > p_{\max}$  と変えながら残差系列に対する  $MA(q)$  モデルの同定を行い、次数  $q$  を決定する。これを繰り返し  $AIC$  (Akaike's Information Criterion) の値が最小となる  $p, q$  を最適な  $ARMA(p, q)$  とした。

#### 4. $ARMA(p, q)$ 時系列モデルの推定

平均値回りの  $ARMA(p, q)$  モデル

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \cdots + \varphi_p y_{t-p} + u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - \cdots - \theta_q u_{t-q} \quad (3.1)$$

ここに、 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  はパラメータである。

(3.1) 式を書き替えると

$$u_t = y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2} - \cdots - \varphi_p y_{t-p} + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \cdots + \theta_q u_{t-q} \quad (3.2)$$

つぎに、 $\varphi$  の推定値を  $\hat{\varphi}$ 、 $\theta$  の推定値を  $\hat{\theta}$  とするとき、残差  $u_t$  を  $\hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta})$  で表すと

$$\hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \vdots \\ \hat{u}_{p+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_{q+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - \hat{\varphi}_1 y_0 - \hat{\varphi}_2 y_{-1} - \cdots - \hat{\varphi}_p y_{1-p} + \hat{\theta}_1 \hat{u}_0 + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{-1} + \cdots + \hat{\theta}_q \hat{u}_{1-q} \\ y_2 - \hat{\varphi}_1 y_1 - \hat{\varphi}_2 y_0 - \cdots - \hat{\varphi}_p y_{2-p} + \hat{\theta}_1 \hat{u}_1 + \hat{\theta}_2 \hat{u}_0 + \cdots + \hat{\theta}_q \hat{u}_{2-q} \\ \hat{y}_3 - \hat{\varphi}_1 y_2 - \hat{\varphi}_2 y_1 - \cdots - \hat{\varphi}_p y_{3-p} + \hat{\theta}_1 u_2 + \hat{\theta}_2 u_1 + \cdots + \hat{\theta}_q u_{3-q} \\ \cdots \cdots \cdots \\ y_{p+1} - \hat{\varphi}_1 y_p - \hat{\varphi}_2 y_{p-1} - \cdots - \hat{\varphi}_p y_1 + \hat{\theta}_1 \hat{u}_p + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{p-1} + \cdots + \hat{\theta}_q \hat{u}_{p-q+1} \\ \cdots \cdots \cdots \\ y_{q+1} - \hat{\varphi}_1 y_q - \hat{\varphi}_2 y_{q-1} - \cdots - \hat{\varphi}_p y_{q-p+1} + \hat{\theta}_1 \hat{u}_q + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{q-1} + \cdots + \hat{\theta}_q \hat{u}_1 \\ \cdots \cdots \cdots \\ y_n - \hat{\varphi}_1 y_{n-1} - \hat{\varphi}_2 y_{n-2} - \cdots - \hat{\varphi}_p y_{n-p} + \hat{\theta}_1 \hat{u}_{n-1} + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{n-2} + \cdots + \hat{\theta}_q \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

となり、パラメータ  $(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) \in R^{p+q}$  とするとき、 $\hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) \in R^n$  に対する二乗和の最小化問題となる。

$$\phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = \hat{f}'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})\hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = \min \quad (3.4)$$

ここで

$$\hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) \\ \hat{f}_2(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) \\ \vdots \\ \hat{f}_n(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

さらに、 $\hat{f} \in C^2$ とし、 $\hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta})$ のヤコビ行列(Jacobian Matrix)を

$$J(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = \nabla \hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{\varphi}_1} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{\varphi}_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{\varphi}_p} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{\theta}_1} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{\theta}_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{\theta}_q} \\ \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \hat{\varphi}_1} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \hat{\varphi}_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \hat{\varphi}_p} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \hat{\theta}_1} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \hat{\theta}_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \hat{\theta}_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial \hat{\varphi}_1} & \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial \hat{\varphi}_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial \hat{\varphi}_p} & \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial \hat{\theta}_1} & \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial \hat{\theta}_2} & \cdots & \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial \hat{\theta}_q} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

とすると(3.4)式の最小解は

$$\nabla \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = J'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})\hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = 0 \quad \nabla \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) \in R^{(p+q) \times (p+q)} \quad (3.8)$$

となり非線形連立方程式を解く問題に帰着される。 $\nabla \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})$ を $(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k$ の近傍で2次の項までテーラー展開すると

$$\nabla \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = \nabla \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k + \nabla^2 \phi \{(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) - (\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k\} + \frac{1}{2!} \{(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) - (\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k\}^t \nabla^3 \phi \{(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) - (\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k\} + \cdots \quad (3.9)$$

である。 $\nabla^2 \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k$ が正定値であるとする(3.9)式の2次関数の極値は最小点となるから

$$\nabla^t \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k + \nabla^2 \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k \{(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) - (\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k\} = 0 \quad (3.10)$$

この(3.10)式の解を次の点 $(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k$ とする。すなわち、 $\nabla^2 \phi \{(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k\}$ が正則ならば

$$(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^{k+1} = (\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k - \{\nabla^2 \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k\}^{-1} \nabla^t \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k \quad (3.11)$$

として与えられる。

$\nabla^2\phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta}^k)$  は  $(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k$  におけるヘッセ行列(Hessian)で

$$\nabla^2\phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\varphi}_1^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\varphi}_1\partial\hat{\varphi}_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\varphi}_1\partial\hat{\varphi}_p} & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\theta}_1^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\theta}_1\partial\hat{\theta}_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\theta}_1\partial\hat{\theta}_q} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\varphi}_2\partial\hat{\varphi}_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\varphi}_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\varphi}_2\partial\hat{\varphi}_p} & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\theta}_2\partial\hat{\theta}_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\theta}_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\theta}_2\partial\hat{\theta}_q} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\varphi}_p\partial\hat{\varphi}_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\varphi}_p\partial\hat{\varphi}_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\varphi}_p^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\theta}_p\partial\hat{\theta}_1} & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\theta}_p\partial\hat{\theta}_2} & \cdots & \frac{\partial^2\phi}{\partial\hat{\theta}_p\partial\hat{\theta}_q} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

である。

(3.8) 式より  $\nabla^2\phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})$  を求めると

$$\nabla\phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = J'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})\hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) &= \nabla\{J'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})\hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta})\} \\ &= \nabla f'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})J(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) + \sum_{i=1}^n \hat{f}_i(\hat{\varphi}, \hat{\theta})\nabla J(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) \\ &= J'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})J(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) + \sum_{i=1}^n \hat{f}_i(\hat{\varphi}, \hat{\theta})\nabla^2\hat{f}_i(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで、(3.14) 式の2次微分の右辺第2項は第1項に比較して極小であると、仮定し省略すると

$$\nabla^2\phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = J'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})J(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) \quad (3.15)$$

すなわち、ガウス・ニュートン法を用いることになる。この(3.15)式と(3.13)式より(3.11)式は

$$\begin{aligned} (\hat{\varphi}, \hat{\theta})^{k+1} &= (\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k - \left[ \nabla^2\phi\{(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k\} \right]^{-1} \nabla\phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k \\ &= (\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k - \left\{ J'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k J(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k \right\}^{-1} J'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k \hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k \end{aligned} \quad (3.16)$$

として、次の停止基準 (termination criterion) を満たすまで  $k=1,2,\dots$  について行う。

$$\frac{|(\hat{\phi}, \hat{\theta})^{k+1} - (\hat{\phi}, \hat{\theta})^k|}{|(\hat{\phi}, \hat{\theta})^k|} \leq \varepsilon \quad \varepsilon: \text{収束判定定数} \quad (3.17)$$

次に  $J(\hat{\phi}, \hat{\theta})$  を求めるために  $\nabla \hat{f}(\hat{\phi}, \hat{\theta})$  を求める

$\hat{u}_i$  は  $\hat{\phi}_i, \hat{\theta}_j$  に関して非線形であるので  $\hat{u}_i$  を  $\hat{\phi}_i, \hat{\theta}_j$  で微分すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{\phi}_i} &= -y_{t-i} - \hat{\phi}_1 \frac{\partial \hat{u}_{t-1}}{\partial \hat{\phi}_i} - \hat{\phi}_2 \frac{\partial \hat{u}_{t-2}}{\partial \hat{\phi}_i} - \cdots - \hat{\phi}_p \frac{\partial \hat{u}_{t-p}}{\partial \hat{\phi}_i} \\ &= -y_{t-i} - \hat{\phi}_1 y_{t-i+1} - \hat{\phi}_2 y_{t-i+2} - \cdots - \hat{\phi}_p y_{t-i+p} \end{aligned} \right\} \quad (i=1,2,\dots,p) \quad (3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}_t}{\partial \hat{\theta}_j} &= \hat{u}_{t-j} + \hat{\theta}_1 \frac{\partial \hat{u}_{t-1}}{\partial \hat{\theta}_j} + \hat{\theta}_2 \frac{\partial \hat{u}_{t-2}}{\partial \hat{\theta}_j} + \cdots + \theta_q \frac{\partial \hat{u}_{t-q}}{\partial \hat{\theta}_j} \\ &= \hat{u}_{t-j} + \hat{\theta}_1 \hat{u}_{t-j+1} + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{t-j+2} + \cdots + \theta_q \hat{u}_{t-j+q} \end{aligned} \right\} \quad (j=1,2,\dots,q)$$

(3.19)

が得られる。これらの結果より  $\nabla \hat{f}(\hat{\phi}, \hat{\theta})$  による  $J(\hat{\phi}, \hat{\theta})$  は

$$J(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \nabla \hat{f}(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} -y_0 & -y_1 & \cdots & -y_{1-p} & \hat{u}_0 & \hat{u}_{-1} & \cdots & \hat{u}_{1-q} \\ -y_1 & -y_0 & \cdots & -y_{2-p} & \hat{u}_1 & \hat{u}_0 & \cdots & \hat{u}_{2-q} \\ & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ -y_{n-1} & -y_{n-2} & \cdots & -y_{n-p} & \hat{u}_{n-1} & \hat{u}_{n-2} & \cdots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\nabla \phi(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = J'(\hat{\phi}, \hat{\theta}) \hat{f}(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} -y_0 & -y_1 & \cdots & -y_{1-p} & \hat{u}_0 & \hat{u}_{-1} & \cdots & \hat{u}_{1-q} \\ -y_1 & -y_0 & \cdots & -y_{2-p} & \hat{u}_1 & \hat{u}_0 & \cdots & \hat{u}_{2-q} \\ & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ -y_{n-1} & -y_{n-2} & \cdots & -y_{n-p} & \hat{u}_{n-1} & \hat{u}_{n-2} & \cdots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\nabla^2 \phi(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = J'(\hat{\phi}, \hat{\theta}) J(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} -y_0 & -y_1 & -y_2 & \cdots & -y_{n-1} & \hat{u}_0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \cdots & \hat{u}_{n-1} \\ -y_1 & -y_0 & -y_1 & \cdots & -y_{n-2} & \hat{u}_{-1} & \hat{u}_0 & \hat{u}_1 & \cdots & \hat{u}_{n-2} \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ -y_{1-q} & -y_{2-q} & -y_{3-q} & \cdots & -y_{n-q} & \hat{u}_{1-q} & \hat{u}_{2-q} & \hat{u}_{3-q} & \cdots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -y_0 & -y_{-1} & \cdots & -y_{1-p} & \hat{u}_0 & \hat{u}_{-1} & \cdots & \hat{u}_{1-q} \\ -y_1 & -y_0 & \cdots & -y_{2-p} & \hat{u}_1 & \hat{u}_0 & \cdots & \hat{u}_{2-q} \\ & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ -y_{n-1} & -y_{n-2} & \cdots & -y_{n-p} & \hat{u}_{n-1} & \hat{u}_{n-2} & \cdots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix}$$

(3. 22)

最小二乗法であるので  $y_0, y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{1-p}, \hat{u}_0, \hat{u}_{-1}, \hat{u}_{-2}, \dots, \hat{u}_{1-q}$  の値は観測されていないのでこれらの値を0とおいた。

その結果  $J(\hat{\phi}, \hat{\theta})$ ,  $\nabla \phi(\hat{\phi}, \hat{\theta})$ ,  $\nabla^2 \phi(\hat{\phi}, \hat{\theta})$  はそれぞれ以下のようになる。

$$\hat{f}(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) \\ \hat{f}_2(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) \\ \vdots \\ \hat{f}_n(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \vdots \\ \hat{u}_{p+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_{q+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - \hat{\phi}_1 y_1 + \hat{\theta}_1 \hat{u}_1 \\ y_3 - \hat{\phi}_1 y_2 - \hat{\phi}_2 y_1 + \hat{\theta}_1 \hat{u}_2 + \hat{\theta}_2 \hat{u}_1 \\ \cdots \cdots \cdots \\ y_{p+1} - \hat{\phi}_1 y_p - \hat{\phi}_2 y_{p-1} - \cdots - \hat{\phi}_p y_1 + \hat{\theta}_1 \hat{u}_p + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{p-1} + \cdots + \hat{\theta}_q \hat{u}_{p-q+1} \\ \cdots \cdots \cdots \\ y_{q+1} - \hat{\phi}_1 y_q - \hat{\phi}_2 y_{q-1} - \cdots - \hat{\phi}_p y_{q-p+1} + \hat{\theta}_1 \hat{u}_q + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{q-1} + \cdots + \hat{\theta}_q \hat{u}_1 \\ \cdots \cdots \cdots \\ y_n - \hat{\phi}_1 y_{n-1} - \hat{\phi}_2 y_{n-2} - \cdots - \hat{\phi}_p y_{n-p} + \hat{\theta}_1 \hat{u}_{n-1} + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{n-2} + \cdots + \hat{\theta}_q \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix}$$

$$J(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \nabla \hat{f}(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{y}_1 & -\hat{y}_2 & \cdots & -\hat{y}_{n-1} & 0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \cdots & \hat{u}_{n-1} \\ 0 & 0 & -\hat{y}_1 & \cdots & -\hat{y}_{n-2} & 0 & 0 & \hat{u}_1 & \cdots & \hat{u}_{n-2} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{y}_{n-p} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix} \quad (3. 23)$$

$$\nabla \phi(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = J'(\hat{\phi}, \hat{\theta}) \hat{f}(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{y}_1 & -\hat{y}_2 & \cdots & -\hat{y}_{n-1} & 0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \cdots & \hat{u}_{n-1} \\ 0 & 0 & -\hat{y}_1 & \cdots & -\hat{y}_{n-2} & 0 & 0 & \hat{u}_1 & \cdots & \hat{u}_{n-2} \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{y}_{n-p} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} \quad (3. 24)$$

$$\nabla^2 \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = J'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})J(\hat{\varphi}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{y}_1 & -\hat{y}_2 & \cdots & -\hat{y}_{n-1} & 0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \cdots & \hat{u}_{n-1} \\ 0 & 0 & -\hat{y}_1 & \cdots & -\hat{y}_{n-2} & 0 & 0 & \hat{u}_1 & \cdots & \hat{u}_{n-2} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{y}_{n-p} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\hat{y}_1 & 0 & \cdots & 0 & \hat{u}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & & & \cdots & \cdots & \\ -\hat{y}_{n-1} & -\hat{y}_{n-2} & \cdots & -\hat{y}_{n-p} & \hat{u}_{n-1} & \hat{u}_{n-2} & \cdots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix}$$

(3. 25)

(3. 23)、(3. 24)、(3. 25) 式の  $J(\hat{\varphi}, \hat{\theta})$ ,  $\nabla \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})$ ,  $\nabla^2 \phi(\hat{\varphi}, \hat{\theta})$  を用いて  
(3. 16) 式を表すと

$$(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^{k+1} = (\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k - \left\{ J'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k J(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k \right\}^{-1} J'(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k \hat{f}(\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k \quad (k=1,2,\dots) \quad (3. 26)$$

となるので、数列  $\left\{ (\hat{\varphi}, \hat{\theta})^k \right\}$  を停止基準を満たすまで求めることができる。

## 5. ARMA(p, q) 推定アルゴリズム

[step01]

ARMA(p, q) モデルの同定 (p, q の決定)

[step02]

初期値の設定

$$\hat{\varphi}_i^0 (i=1,2,\dots,p) = 0 \quad \hat{\theta}_i^0 (i=1,2,\dots,q) = 0.3$$

[step03]

$k = 0$

[step04]

残差  $\hat{f}(\varphi^k, \hat{\theta}^k)$  の計算

$$\hat{f}(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) = \begin{bmatrix} \hat{f}_1(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) \\ \hat{f}_2(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) \\ \vdots \\ \hat{f}_n(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \vdots \\ \hat{u}_{p+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_{q+1} \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - \hat{\phi}_1 y_1 + \hat{\theta}_1 \hat{u}_1 \\ y_3 - \hat{\phi}_1 y_2 - \hat{\phi}_2 y_1 + \hat{\theta}_1 \hat{u}_2 + \hat{\theta}_2 \hat{u}_1 \\ \dots \\ y_{p+1} - \hat{\phi}_1 y_p - \hat{\phi}_2 y_{p-1} - \dots - \hat{\phi}_p y_1 + \hat{\theta}_1 \hat{u}_p + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{p-1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{u}_{p-q+1} \\ \dots \\ y_{q+1} - \hat{\phi}_1 y_q - \hat{\phi}_2 y_{q-1} - \dots - \hat{\phi}_p y_{q-p+1} + \hat{\theta}_1 \hat{u}_q + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{q-1} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{u}_1 \\ \dots \\ y_n - \hat{\phi}_1 y_{n-1} - \hat{\phi}_2 y_{n-2} - \dots - \hat{\phi}_p y_{n-p} + \hat{\theta}_1 \hat{u}_{n-1} + \hat{\theta}_2 \hat{u}_{n-2} + \dots + \hat{\theta}_q \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix}$$

[step05]

Jacobian Matrixの計算

$$J(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) = \nabla \hat{f}(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\hat{y}_1 & 0 & \dots & 0 & \hat{u}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\hat{y}_{n-1} & -\hat{y}_{n-2} & \dots & -\hat{y}_{n-p} & \hat{u}_{n-1} & \hat{u}_{n-2} & \dots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix}$$

[step06]

Hessianの計算

$$\nabla^2 \hat{\phi}(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) = J'(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) J(\hat{\phi}^k, \hat{\theta}^k) = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{y}_1 & -\hat{y}_2 & \dots & -\hat{y}_{n-1} & 0 & \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \dots & \hat{u}_{n-1} \\ 0 & 0 & -\hat{y}_1 & \dots & -\hat{y}_{n-2} & 0 & 0 & \hat{u}_1 & \dots & \hat{u}_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\hat{y}_{n-p} & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\hat{y}_1 & 0 & \dots & 0 & \hat{u}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\hat{y}_{n-1} & -\hat{y}_{n-2} & \dots & -\hat{y}_{n-p} & \hat{u}_{n-1} & \hat{u}_{n-2} & \dots & \hat{u}_{n-q} \end{bmatrix}$$

[step07]

$(\hat{\phi}, \hat{\theta})^k$  の更新

$$(\hat{\phi}, \hat{\theta})^{k+1} = (\hat{\phi}, \hat{\theta})^k - \left[ J'(\hat{\phi}, \hat{\theta})^k J(\hat{\phi}, \hat{\theta})^k \right]^{-1} J'(\hat{\phi}, \hat{\theta})^k \hat{f}(\hat{\phi}, \hat{\theta})^k$$

[step08]

収束判定

$$\frac{|(\hat{\phi}, \hat{\theta})^{k+1} - (\hat{\phi}, \hat{\theta})^k|}{|(\hat{\phi}, \hat{\theta})^k|} \leq \varepsilon \quad \varepsilon: \text{収束判定定数}$$

を満たしていればstep09へ, 満たしていなければ

$$k = k + 1$$

を行ってstep04へ

[step09]

終了

#### IV 計算例

本研究で用いたデータはいささか古いが1947年1月から1970年12月までの米国の新規住宅建設費である。図1は原データにセンサス局法ⅡX-11により季節変動調整を行った結果で、図2は除去された季節指数である。

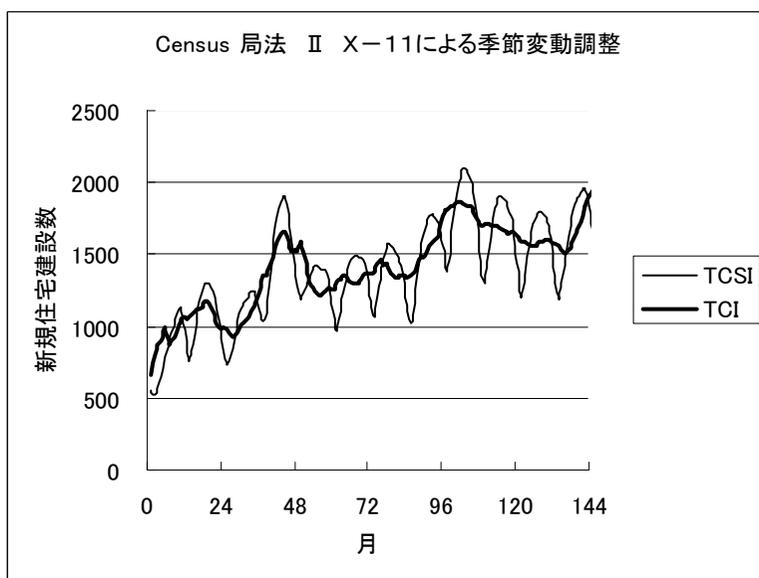


図1 米国新規住宅建設費 (単位100万ドル)  
(出典 米国商務省 1971 Business Statistics)

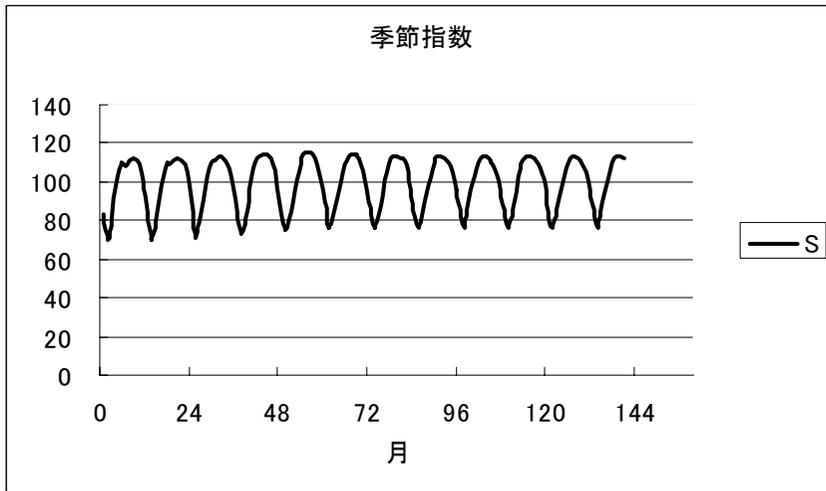


図2 除去された季節指数

調整された時系列  $TCI$  系列より多項式回帰分析により傾向変動を除去した系列  $CI$  を図3に示す。

除去された系列を用いて1年以上の周期をもつ景気変動の周期を調べるためにBlackman-Tukey法によりスペクトルを求めた結果が図4である横軸は周波数をとったが、周波数の逆数より周期を求めると57.6ヶ月であった。求めた周期のフーリエ級数を用いて  $CI$  系列の景気変動  $C$  を示したのが図5である。

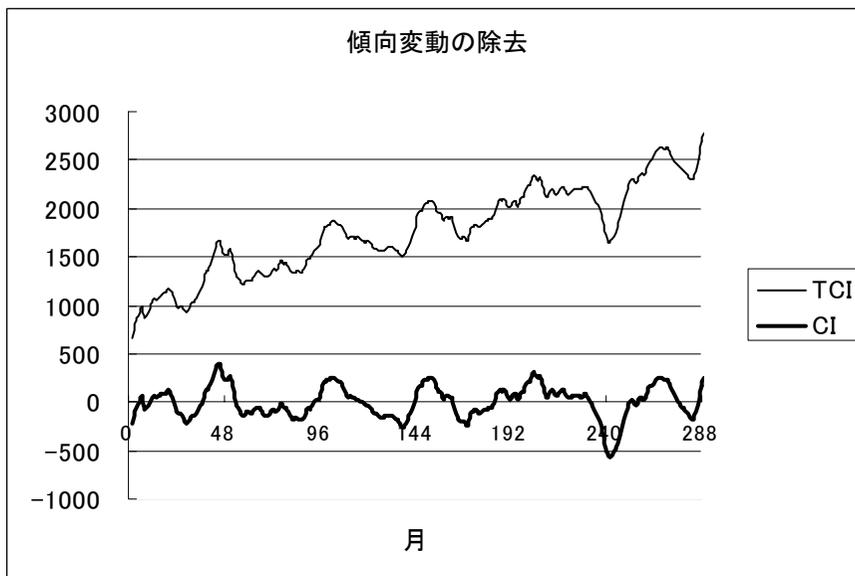


図3 傾向変動除去後の系列

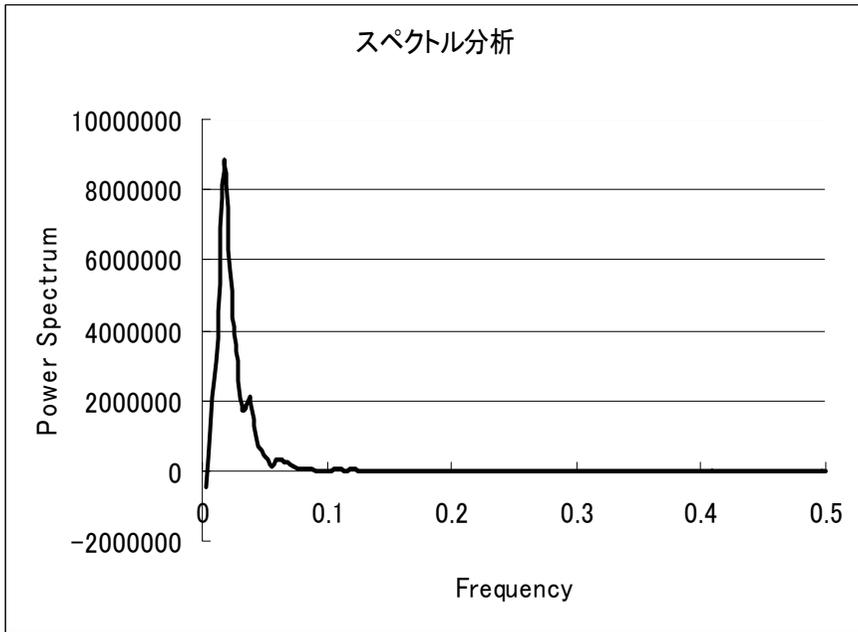


図4 景気変動の周期

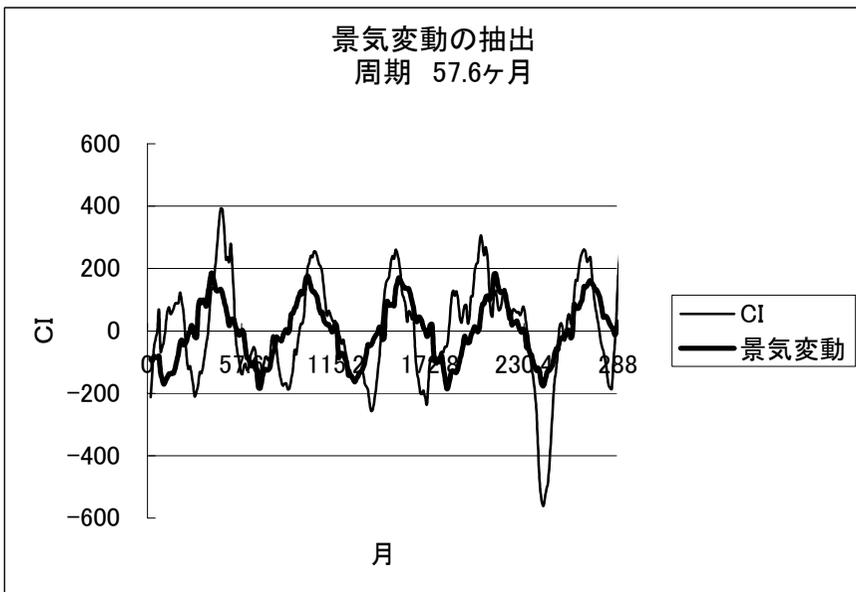


図5 フーリエ級数を用いた景気変動の抽出

さらに  $CI$  系列から景気変動  $C$  を除去したのが図6である。

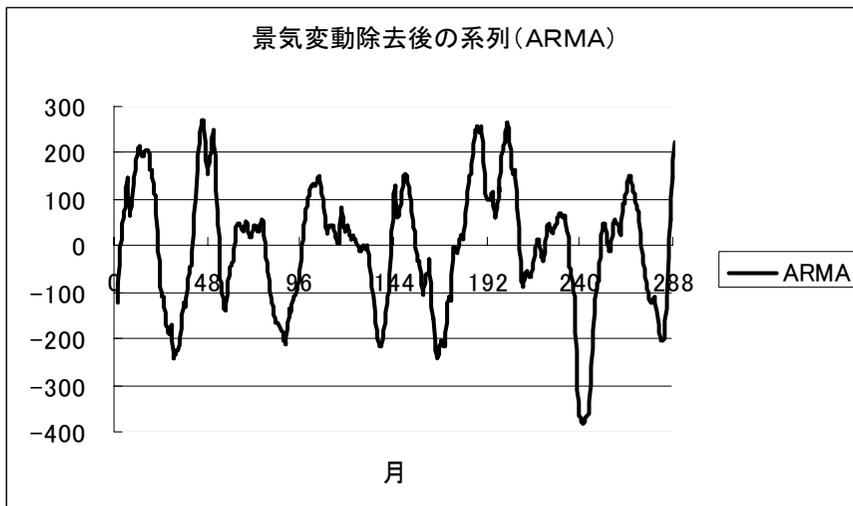


図6 景気変動を除去した  $ARMA$  系列

景気変動を除去した系列  $ARMA$  系列に本論分の推定を行い次の結果が得られた

$p = 2, q = 1$  すなわち  $ARMA(2,1)$  で  $AIC = 6.90, R = 0.973$

$\hat{y}_t = 1.698\hat{y}_{t-1} - 0.751\hat{y}_{t-2} + \hat{u}_t + 0.327\hat{u}_{t-1}$  であった。相関係数、AICとも良い結果が得られた。観測値と推定値がほぼ一致していることが図7のグラフより明らかである。

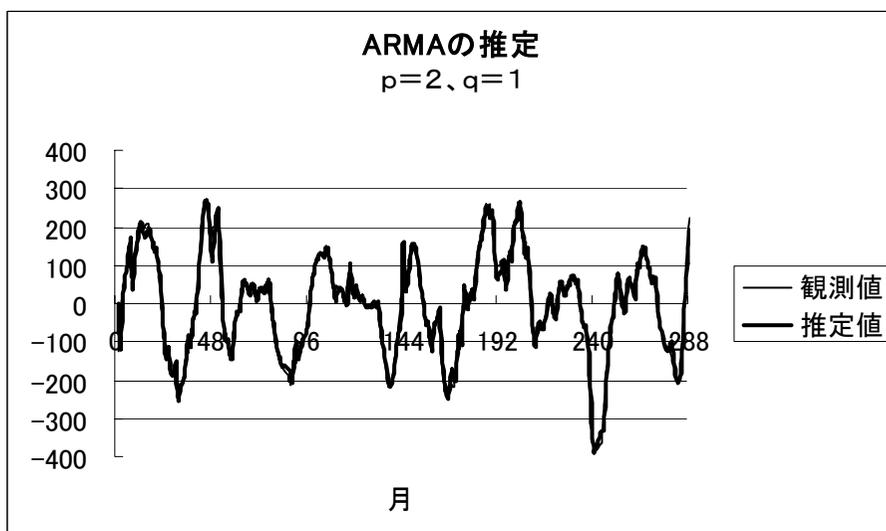


図7  $ARMA$  系列の推定結果

## V おわりに

計算例で示したとおり、時系列モデルの定常化に関しては

- ① 季節性の除去  
センサス局法ⅡX-11を用いる
- ② 傾向変動の除去  
多項式回帰により傾向を推定し除去する。
- ③ 景気変動の除去  
Blackman-Tukey法または高速フーリエ変換によるスペクトルにより景気変動の周期を求め、求めた周期のフーリエ級

数を用いて景気変動を除去する。

推定に関しては、非線形最小二乗法により時系列モデルの推定を行う。その際時間 $t \leq 0$ に対する残 $\hat{u}_t$ に関しては、観測値が無いので $\hat{u}_t = 0 (t \leq 0)$ とおくことにより推定可能であり、正規方程式もガウス・ニュートン法で十分良好な結果が得られた。

以上により、現実のデータに対し時系列モデルの定常化および定常化された時系列モデルに関する推定に関し実証を行うことができた。

---

### 参考文献

- (1) 花村綾、坂野匡弘、唐沢豊  
「SARIMA過程に従う時系列データの定常化とモデルの推定」日本ロジスティクス・システム学会第7回全国大会予稿集2004
- (2) 尾崎統、北川源四郎「時系列解析の方法」朝倉書店
- (3) A・C・ハーベイ著 国友直人／山本拓訳  
「時系列モデル入門」東京大学出版会
- (4) W・ヴァンデル著 養谷千鳳彦、廣松毅訳「時系列入門」多賀出版
- (5) 廣松毅、浪花貞夫著「経済時系列分析」多賀出版
- (6) R・J・ブロックウエル、R・A・デービス著 逸見功、田中稔、宇佐美嘉弘、渡辺則生訳「時系列解析と予測」シーエーピー出版
- (7) 溝口敏行、刈屋武昭著「経済時系列入門」日本経済新聞社
- (8) 中塚利直著「時系列解析の数学的基礎」教育出版
- (9) 杉原左右一著「時系列の統計的研究」東洋経済新報社
- (10) 藤井光昭著「時系列解析」コロナ社
- (11) 原田康平著「経済時系列再考」九州大学出版会
- (12) 北川源四郎、赤池弘次著「時系列解析の実際Ⅰ」
- (13) 北川源四郎、赤池弘次著「時系列解析の実際Ⅱ」